

文章编号 2095-7335(2017)01-0053-06

DOI:10.16375/j.cnki.cn45-1395/t.2017.01.010

基于微分求积法分析粘弹性桩基的混沌效应

张继松, 瑚宏昌*

(广西科技大学 土木建筑工程学院, 广西 柳州 545006)

摘要:为了更好地研究预制基础桩的非线性动力特征及其它特性, 考虑桩-土之间的摩擦影响, 利用 kelvin 模型, 建立在轴向荷载下粘弹性桩基的非线性振动动力学模型, 通过力学模型分析得到结构的动力偏微分方程; 运用微分求积法(DQM)将偏微分方程在空间域进行网格划分并离散化, 进而导出粘弹性桩基的常微分动力方程; 最后用 matlab 数值模拟得到不同桩基弹性模量下的相平面图、功率谱图、庞加莱截面图和时程曲线图。结果表明: 在轴向荷载作用下粘弹性桩基会发生混沌运动, 且桩基弹性模量越大桩基越容易发生混沌运动, 同时更加直观形象地验证了混沌效应的基本特征。

关键词:粘弹性桩; kelvin 模型; 微分求积法; 混沌

中图分类号:TU311.3 文献标志码:A

0 引言

随着科技的发展, 大量新型材料被广泛运用到实际工程中, 使得传统结构呈现出粘弹性的性能, 并引起了大量的学者对其进行研究。桩基作为工程中常见的结构, 建立其非线性动力学模型对研究桩的动力学分析有重要的意义。胡春林等^[1-2]研究非线性粘弹性嵌岩桩纵向振动中运用 Galerkin 方法将非线性偏微分方程进行简化得到简化的偏微分-积分动力学方程。刘明等^[3]分析桩基轴向振动动力学时运用多时间尺度法对动力学偏微分方程进行近似简化。骆文和等^[4]运用分离变量法对动力学方程简化分析了桩-土之间的竖向振动。随后, 学者运用复模态法^[5]、分数导数微分^[6]等方法研究分析了桩基非线性动力学振动。

为了更好地分析桩基的非线性动力学行为, 如何建立粘弹性桩的动力学方程就显得尤为重要。本文采用微分求积法^[7-9]对粘弹性桩基的动力学偏微分方程在空间域进行网格划分离散化, 得到粘弹性预制基础桩基的非线性动力学常微分方程模型, 最后采用四阶 Runge-Kutta 法运用 matlab 数值模拟分析桩基在轴向荷载下发生的复杂的非线性动力学行为。

1 力学模型的建立

一个等截面圆形基础桩。设桩长为 l , 直径为 d , 截面面积为 A 。材料的密度为 ρ , 桩在轴向荷载的作用下, 截面始终保持为平面。假定桩基向上为正半轴, 桩基底部的圆心为坐标系的原点处, 如图 1 所示。考虑桩-土之间的相互作用力, 假定周围土对桩基的反力大小与位移成正比, 且周围土对桩身的阻力大小与其位移速率也成正比, 则预制基础桩的动力学模型为:

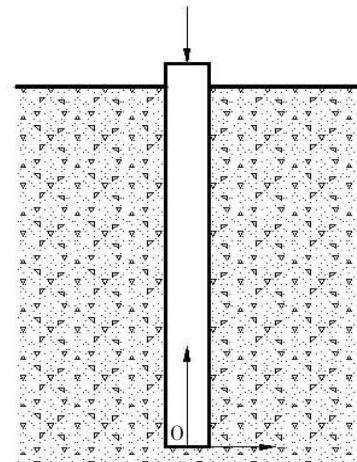


图 1 桩基振动模型

Fig.1 Pile foundation vibration model

收稿日期:2016-06-24

基金项目:国家自然科学基金项目(51168006)资助。

*通信作者:琚宏昌, 博士, 副教授, 研究方向: 动力学及其控制, E-mail: qhc410603@126.com.

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + k u(x,t) - A \frac{\partial^2 \sigma(x,t)}{\partial x^2} = F(x,t) \quad (1)$$

其中 c 为桩身周围土对桩基的阻尼系数; k 为桩身周围土的刚度系数.

假定材料满足 kelvin 模型的微分型本构关系如下:

$$\sigma(x,t) = E\varepsilon(x,t) + \eta \frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial t} \quad (2)$$

将本构关系式代入得到粘弹性预制基础桩的动力学模型为:

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + k u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \eta A \frac{\partial^2 \varepsilon(x,t)}{\partial x \partial t} \right] = F(x,t) \quad (3)$$

对于桩的底部位移为 0, 底部边界条件为:

$$u(x,t) \Big|_{x=0} = 0 \quad (4)$$

对于桩的顶端应变为 0, 顶端边界条件为:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (5)$$

2 建立粘弹性结构的微分型动力学模型

微分求积法是化简偏微分方程常用的数值分析解法, 它是将函数中的偏导数近似地用加权系数代替, 将函数的定义域以网格形式离散简化得到常微分方程的形式.

在区间 $[a,b]$ 内连续可微的一维函数 $f(x)$, 任意给定 N 个互异的节点: $a=x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. 根据插值理论, 有:

$$f(x) = \sum_{j=1}^N p_j(x) f(x_j) \quad (6)$$

其中, $p_j(x)$ 为插值基函数, x_j 为第 j 个节点的坐标.

分别对式(6)中左右两边 x 求 k 阶导, 得:

$$\frac{d^k(f(x))}{dx^k} = \sum_{j=1}^N \frac{d^k(p_j(x))}{dx^k} f(x_j) \quad (7)$$

令 $f_i^{(k)} = \frac{d^k(f(x_i))}{dx^k}$, $A_{ij}^{(k)} = \frac{d^k(p_j(x))}{dx^k}$, $f_i = f(x_i)$, ($i=1, 2, \dots, N$), 则有:

$$f_i^{(k)} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(k)} f_j \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

式中, $A_{ij}^{(k)}$ 即一维函数的 k 阶导数的加权系数.

由此由一维函数推广到二维可微函数 $g(x,y)$, 在给定区域 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ 内, 把 y 当作参数, 在 x 的方向上插值可得:

$$g(x,y) = \sum_{k=1}^{N_x} p_k(x) g(x_k, y) \quad (9)$$

对式(9)中 x 的 r 阶求导可得:

$$\frac{\partial^r g(x,y)}{\partial x^r} = \sum_{k=1}^{N_x} \frac{\partial^r (p_k(x))}{\partial x^r} g(x_k, y) \quad (10)$$

式中 N_x 为 x 方向上的节点个数.

以 x_i, y_j 代替式中的 x, y , 可得到:

$$\left(\frac{\partial^r g}{\partial x^r} \right)^{ij} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} g_{kj} \quad (11)$$

其中, $A_{ik}^{(r)} = \frac{\partial^r(p_k(x))}{\partial x^r}$, 为函数 $p_k(x)$ 关于 x 的 r 阶偏导数的加权系数.

同理, 运用以 x 为参数, 在 y 上插值, 对 y 的 t 阶求导:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y^t} = \sum_{m=1}^{N_y} \frac{\partial^t(p_m(y))}{\partial y^t} g(x, y_m) \quad (12)$$

以 x_i, y_j 代替式中的 x, y , 可得到:

$$\left(\frac{\partial^t g}{\partial y^t} \right) = \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^{(t)} g_{im} \quad (13)$$

由此得到二维函数的求积分公式. 其中 $A_{ij}^{(k)}$ 和 $B_{ij}^{(k)}$ 也满足递推公式:

$$A_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} A_{kj}^{(k-1)} = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} A_{kj}^{(k-2)} = \cdots = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(k-1)} A_{kj}^{(1)} \quad (i,j=1,2,\dots,N) \quad (14)$$

$$B_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^N B_{ik}^{(1)} B_{kj}^{(k-1)} = \sum_{k=1}^N B_{ik}^{(2)} B_{kj}^{(k-2)} = \cdots = \sum_{k=1}^N B_{ik}^{(k-1)} B_{kj}^{(1)} \quad (i,j=1,2,\dots,N) \quad (15)$$

为了减小计算中所产生误差过大对最后的分析结果造成的影响, 插值函数假定为拉格朗日插值函数, 满足:

$$p_j(x) = \prod_{i=1, i \neq j}^N \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (16)$$

对于上式公式关于 x 在 x_i 处求一阶导数, 得:

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \prod_{k=1, k \neq i, j}^N (x_i - x_k) / \prod_{k=1, k \neq j}^N (x_j - x_k) & (i, j=1, 2, \dots, N; j \neq i) \\ \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_k} & (i, j=1, 2, \dots, N; j=i) \end{cases} \quad (17)$$

依据式(9)和式(10)可计算出相应的高阶权系数为:

$$A_{ij}^{(r)} = \begin{cases} r \left(A_{ij}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right) & (i, j=1, 2, \dots, N; j \neq i) \\ - \sum_{k=1, k \neq j}^N A_{jk}^{(r)} & (i, j=1, 2, \dots, N; j=i) \end{cases} \quad (18)$$

对于小变形, 轴向应变与位移的关系为:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (19)$$

将式(19)代入式(3)中, 即为粘弹性预制基础桩基的动力学偏微分方程为:

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + k u(x, t) - EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \eta A \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = F(x, t) \quad (20)$$

由式(11)可得:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} u(x_j, t) \quad (21)$$

其中 $A_{ij}^{(2)}$ 为二维函数 $u(x, t)$ 的二阶偏导的加权系数, 由式(18)可得.

将式(20)进行离散、简化可得:

$$\rho A \ddot{u}_j + C \dot{u}_j + k u_j - EA \sum_{j=1}^{N-2} A_{ij}^{(2)} u_j - \eta A \sum_{j=1}^{N-2} A_{ij}^{(2)} \dot{u}_j = b \cos(wt). \quad (22)$$

其中, $u_j = u_j(x, t)$ ($j=1, 2, \dots, N$); $F(x, t) = b \cos(wt)$, 上述公式即为粘弹性预制基础桩的非线性微分型振动动力学模型.

3 数值模拟

采用四阶 Runge-Kutta 法对非线性常微分动力学模型运用 matlab 数值模拟分析。初始参数为桩的直径 $A=0.1 \text{ m}^2$, 材料的密度 $\rho=2.5 \text{ g/cm}^3$, 土的刚度系数 $k=2.2\times 10^5 \text{ Pa}$, 阻尼系数 $C=2.3\times 10^3 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, 桩身的粘弹性系数 $\eta=1\times 10^5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. 外部轴向荷载作用力为 $F=500 \text{ N}$.

假设材料弹性模量 E 的变化范围为 $2.1\times 10^8 \text{ Pa} \sim 2.1\times 10^{10} \text{ Pa}$, 以步长为 10 增加, 进而得到 3 组所对应的相平面图、功率谱图、庞加莱截面图、时程曲线图, 如图 2~图 4 所示。

分别对比分析图 2~图 4 中所对应的相平面图、功率谱图、庞加莱截面图、时程曲线图, 可发现随着桩基弹性模量的增加, 桩基将从周期运动进入混沌运动, 弹性模量越大越容易发生混沌运动, 同时图 3 和图 4 也符合混沌效应的基本特征, 具体分析如下:

1)对于相平面图分析, 图 2 中的相平面图形中明显是个封闭的运动轨线, 图 3 和图 4 的图形中明显扭结在一起形成一个不封闭的运动轨迹, 具有无限层次的自相似性;

2)对于功率谱图分析, 图 2 中功率谱图中对应尖峰, 而图 3 和图 4 中图形出现“噪声背景”和宽峰;

3)对于庞加莱截面图分析, 图 2 中的庞加莱截面图上是个闭合的曲线图形, 而图 3 和图 4 中的图形渐渐呈现出成片的密集点, 越来越具有层次结构性;

4)对于时程曲线图分析, 图 2 中时程曲线图在一段时间后出现了一定的规律, 没有了跳动性变化, 非常稳定, 而图 3 和图 4 中的功率谱图形随着时间的推移, 一直有跳跃性变动。

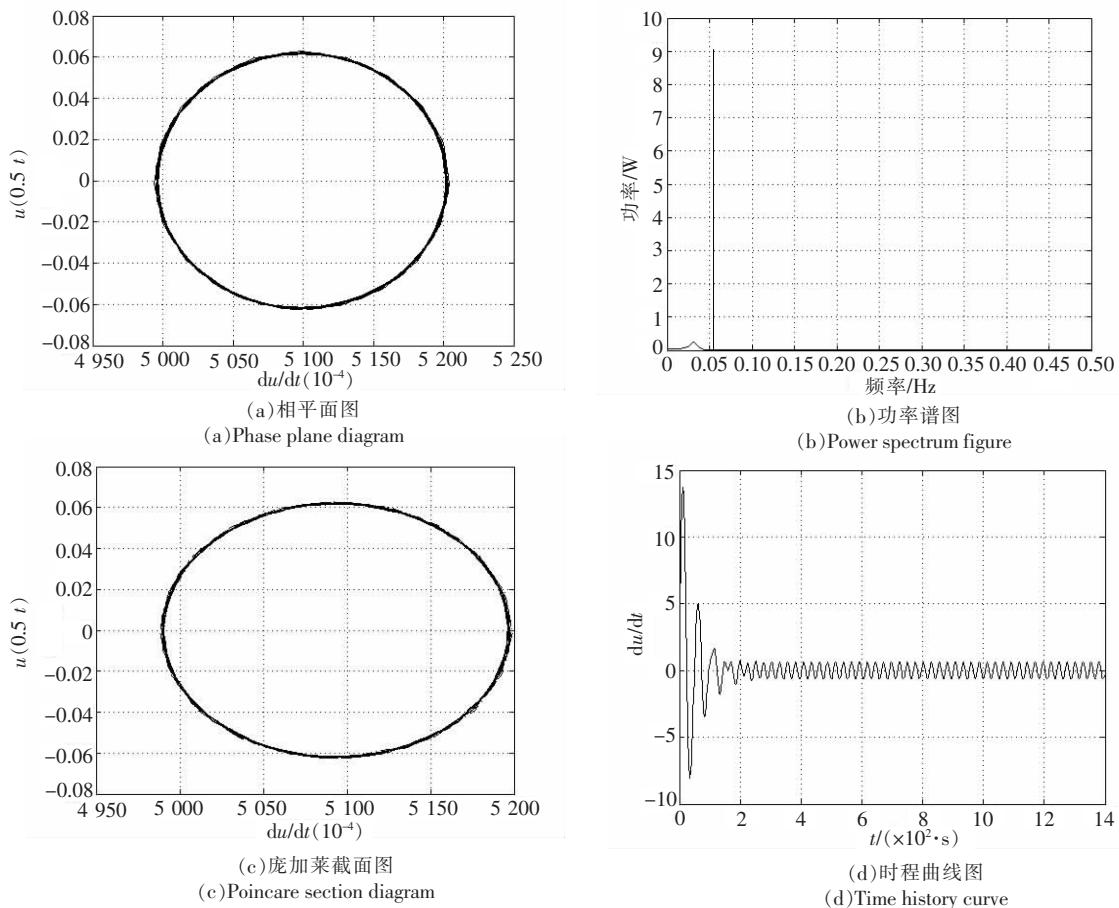


图 2 准周期运动 ($E=2.1\times 10^8 \text{ Pa}$)
Fig.2 Quasi-periodic motion when $E=2.1\times 10^8 \text{ Pa}$

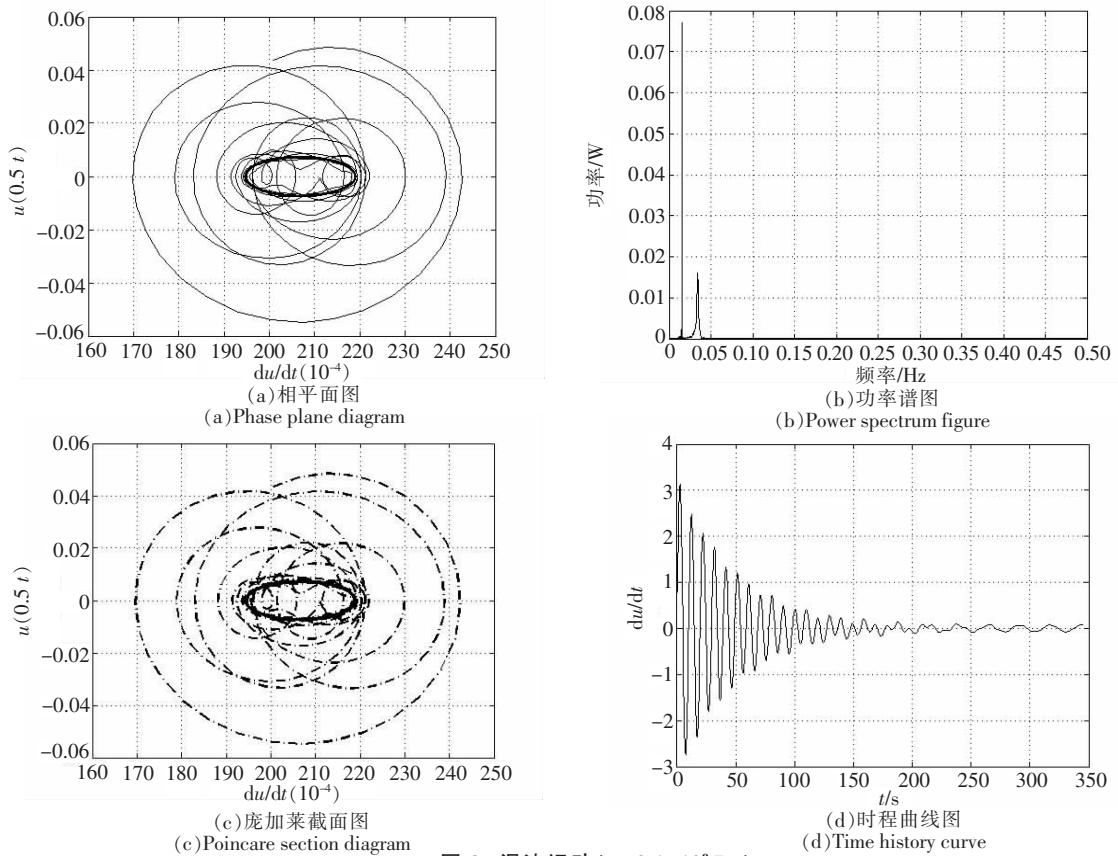


图3 混沌运动($E=2.1\times 10^9$ Pa)
Fig.3 Chaotic motion when $E=2.1\times 10^9$ Pa

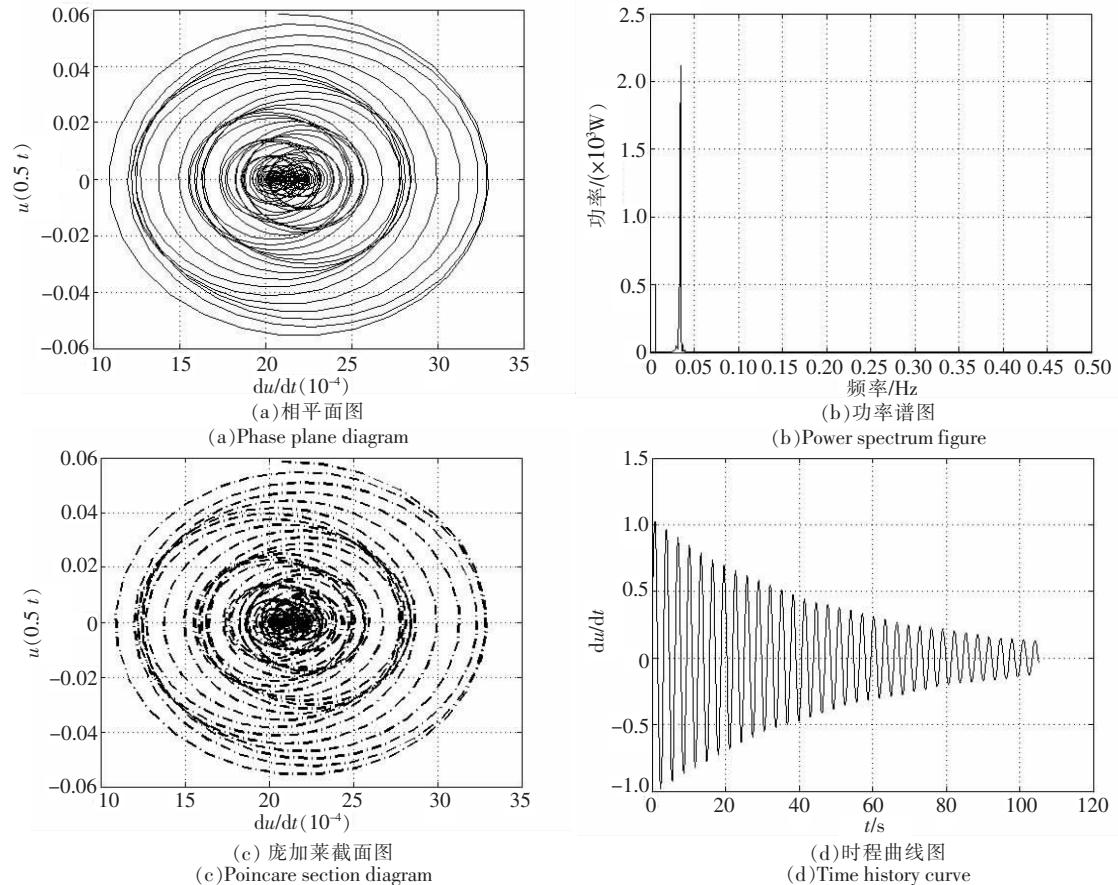


图4 混沌运动($E=2.1\times 10^{10}$ Pa)
Fig.4 Chaotic motion when $E=2.1\times 10^{10}$ Pa

4 结论

本文考虑了桩-土之间摩擦影响,建立了在轴向荷载下粘弹性预制基础桩的动力学偏微分运动学方程.利用微分求积法在空间域进行网格划分离散对其简化得到常微分方程,这种方法更加简洁,在 matlab 的分析中更为准确.数值分析表明:受轴向荷载作用下的粘弹性桩基可以呈现出周期运动和混沌运动;桩身弹性模量对桩基的混沌运动有影响,弹性模量越大桩基越容易发生混沌运动;同时图形也更加直观形象地反映出了混沌运动的基本特征.

参考文献

- [1] 胡春林,程昌钧.非线性粘弹性基桩纵向混沌运动[J].岩土力学,2005,26(10):1541-1544.
- [2] 任九生,程昌钧.非线性粘弹性桩耦合运动中的混沌分析[J].振动与冲击,2006, 25(5):21-23,189.
- [3] 刘民,陈中学,胡春林.基于多时间尺度法的桩基轴向振动分析研究[J].长江科学院院报,2009,26(12):102-105.
- [4] 骆文和,闫启方.考虑桩-土相互作用的粘弹性土中管桩的纵向动力阻抗分析[J].昆明理工大学学报(理工版),2010, 35(5): 28-32,36.
- [5] 刘民,陈中学.基于复模态法的粘弹性基桩横向振动研究[J].长江科学院院报,2010,27(12):76-78,82.
- [6] 刘林超,闫启方,杨骁.分数导数粘弹性土层模型中桩基竖向振动特性研究[J].工程力学,2011,28(8):177-182.
- [7] 刘静,朱媛媛,胡育佳.基础-饱和土地基耦合系统分析的微分求积单元法[J].力学季刊,2014,35(1):54-65.
- [8] 陈姗,琚宏昌.简谐荷载作用下粘弹性梁振动的非线性动力学模型及其简化[J].广西科技大学学报,2014, 25(4):30-33,39.
- [9] 王冬梅,张伟,李慕荣.用微分求积法分析轴向移动粘弹性梁的非平面非线性振动[J].力学与控制学报,2015,13(1):23-27.

Chaos effect analysis of viscoelastic pile based on differential quadrature method

ZHANG Ji-song, JU Hong-chang*

(School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou 545006, China)

Abstract: To study the nonlinear dynamic characteristics and other characteristics of prefabricated foundation piles better, considering the influence of friction between pile and soil and based on the Kelvin model, nonlinear vibration dynamic model of viscoelastic pile under axial load is established. The dynamic partial differential equation of structure is obtained by the analysis of the mechanical model, the partial differential equations are partitioned and discretized in space domain by differential quadrature method (DQM), and the ordinary differential dynamic equations of viscoelastic foundation pile are derived. Finally, phase diagram, power spectrum, poincare section and time history curve are gained with numerical simulation of matlab. The results show that the chaotic motion can occur in the viscoelastic foundation pile under axial load; the bigger the elastic modulus of pile foundation, the more prone to chaotic motion; meanwhile, the basic features of chaotic effects are more intuitively and vividly verified.

Key words: viscoelastic foundation pile; Kelvin model; differential quadrature method; chaos

(学科编辑:黎娅)